

Лекція 3.

Математична модель задачі. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь.

Дуже багато типових ситуацій з нашого побуту, наприклад звичайний похід у магазин, може обернутися необхідністю розв'язати деяку задачу. А значну кількість цих задач набагато легше розв'язати, склавши відповідне рівняння.

Ми навчилися розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною для того, щоб застосовувати це вміння для розв'язування текстових задач. Як правило, задача являє собою деяку життєву ситуацію. Щоб розв'язати задачу, необхідно цю життєву ситуацію перекласти на мову алгебри — це називається скласти математичну модель задачі. Математична модель — це опис якогось реального об'єкту або процесу мовою математичних понять, відношень, формул, рівнянь.

Для того щоб скласти математичну модель задачі, потрібно спочатку вибрати основне невідоме, а потім, поетапно аналізуючи умову задачі, скласти відповідні рівняння. Само по собі рівняння, складене за умовою задачі, не є повною математичною моделлю реальної ситуації, відображеної в умові. Воно не враховує фізичних властивостей предметів і явищ, про які йдеться в задачі, реальних співвідношень між допустимими значеннями відповідних фізичних величин. Тому розв'язки рівняння можуть не відповідати дійсності, і треба обов'язково перевірити, чи задовольняють корені рівняння умову задачі, чи враховують змістові обмеження для значень величин, що розглядаються. Отже, відповідь, яку дістали за складеним рівнянням, необхідно перевірити за змістом задачі. Чи задовольняє знайдений розв'язок саме умову, а не рівняння, складене за умовою задачі, адже можна неправильно скласти рівняння, а розв'язати його правильно.

Корисно з метою перевірки скласти й розв'язати задачу, в якій шукане число беруть за дане, а одне з даних — за шукане.

Приклад. Знайдіть, скільки треба квадратних плиток зі стороною 15 см, щоб застелити підлогу ванної кімнати, розміри якої 3,3 м на 2,8 м.

Побудуємо математичну модель задачі: плитка має форму квадрата, підлога — форму прямокутника. Завдання, поставлене в задачі, мовою математики формулюється так: у скільки разів площа прямокутника зі сторонами 2,8 м і 3,3 м більша від площі квадрата зі стороною 15 см?

Розв'язання математичної задачі:

1) площа прямокутника: $3,3 \cdot 2,8 = 9,24 \text{ (м}^2\text{)}$;

2) площа квадрата: $15^2 = 225 \text{ (см}^2\text{)} = 0,0225 \text{ (м}^2\text{)}$;

3) $\frac{9,24}{0,0225} = 410, (6)$.

Відповідь: треба не менше ніж 411 плиток.

У формулюванні задачі використовуються не математичні поняття. Це прикладні задачі.

Розв'язування задачі на історичну тематику.

Історія зберегла нам мало фактів біографії стародавнього математика Діофанта. Все, що відомо про нього, взято з напису на його гробниці, складеного у формі математичної задачі. Ми наведемо цей напис:

Рідною мовою	Мовою алгебри
Подорожній! Тут прах похований Діофанта. І числа розповісти можуть, о диво, як довго життя його тривало	x
Частина шоста його промайнула прекрасним дитинством	$\frac{x}{6}$
Дванадцята частина життя ще пройшла — покрилось пушком тоді підборіддя	$\frac{x}{12}$
Сьому в бездітному шлюбі провів Діофант	$\frac{x}{7}$
Пройшло п'ятиріччя: він був щасливий народженням прекрасного первістка-сина	5
Якому доля лише половину життя чудового і світлого дала порівняно з батьком	$\frac{x}{2}$
І в горі глибокім старець земного життя кінець прийняв, проживши лиш років чотири з тих пір, як без сина зостався	4
Скажи, скільки років життя досягнувши, смерть прийняв Діофант?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Розв'язавши рівняння і знайшовши, що $x=84$, дізнаємося такі епізоди біографії Діофанта: він одружився у 21 рік, став батьком у 38 років, втратив сина у 80 років.

Використання рівнянь дає змогу спростити розв'язування багатьох задач.

Розв'язування задач при цьому розбивається на три етапи

1) складання рівняння за умовою задачі (перекладання задачі з рідної мови на мову алгебраїчну);

2) розв'язування одержаного рівняння;

3) аналіз одержаної відповіді, порівняння її з умовою задачі.

Задача 1.

Я задумав число. Якщо помножити його на 4, а добуток зменшити на 30, дістанемо 10. Знайдіть це число.

Розв'язання:

Щоб скласти рівняння за умовою задачі, скористаємося записом у вигляді таблиці.

Звичайна мова	Мова алгебри
Я задумав число.	x
Якщо помножити його на 4,	$4x$
а добуток зменшити на 30,	$4x-30$
дістанемо 10.	$4x-30 = 10$
Знайдіть це число.	$x = ?$

Маємо рівняння $4x - 30 = 10$.

Розв'яжемо його:

$$4x - 30 = 10,$$

$$4x = 30 + 10,$$

$$4x = 40,$$

$$x = 40 : 4,$$

$$x = 10.$$

Отже, я задумав число 10.

Відповідь. 10.

Задача 2.

На першій полиці на 6 книжок менше, ніж на другій полиці, й удвічі менше, ніж на третій. Скільки книжок на кожній полиці, якщо на трьох полицях усього 42 книжки?

Розв'язання:

Нехай на першій полиці x книжок, тоді на другій — $(x + 6)$ книжок, а на третій — $2x$ книжок. Згідно з умовою задачі маємо:

$$x + x + 6 + 2x = 42.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$x + x + 6 + 2x = 42,$$

$$4x + 6 = 42,$$

$$4x = 42 - 6,$$

$$4x = 36,$$

$$x = 9.$$

Отже, на першій полиці 9 книжок, на другій - $x + 6 = 9 + 6 = 15$ (книжок), а на третій — $2x = 2 \cdot 9 = 18$ (книжок).

Відповідь. 9, 15 і 18 книжок.

Задача 3.

Три трактористи зорали разом 72 га. Перший зорав на 6 га більше від другого, а другий на 9 га більше від третього. Скільки гектарів зорав кожний тракторист?

Розв'язання:

Складемо стислий запис умови.

Перший тракторист — на 6 га більше, ніж
другий тракторист — на 9 га більше, ніж 72 га
третій тракторист —

Нехай третій тракторист зорав x га, тоді другий тракторист зорав $(x + 9)$ га, а перший — $(x + 9 + 6)$ га. За умовою задачі маємо:

$$x + x + 9 + x + 9 + 6 = 72.$$

$$\text{Звідси } 3x + 24 = 72,$$

$$3x = 72 - 24,$$

$$3x = 48,$$

$$x = 16,$$

$$\text{тоді } x + 9 = 16 + 9 = 25,$$

$$x + 9 + 6 = 25 + 6 = 31.$$

Отже, перший тракторист зорав 31 га, другий — 25 га, третій — 16 га.

Відповідь. 31 га, 25 га, 16 га.

Задача 4.

У трьох кошиках 54 кг яблук. У першому кошику на 12 кг менше ніж у другому, а в третьому — вдвічі більше, ніж у першому. Скільки кілограмів яблук у кожному кошику?

Розв'язання

Складемо стислий запис умови.

Перший кошик — на 12 кг менше, ніж
другий кошик 54 кг
третій кошик — удвічі більше, ніж

Нехай у першому кошику було x кг яблук, тоді в другому — $(x + 12)$ кг яблук, а в третьому — $2x$ кг. За умовою задачі

$$x + x + 12 + 2x = 54.$$

$$\text{Звідси } 4x + 12 = 54, 4x = 54 - 12, 4x = 42, x = 10,5.$$

$$\text{Тоді } x + 12 = 10,5 + 12 = 22,5, 2x = 10,5 \cdot 2 = 21.$$

Отже, в першому кошику 10,5 кг яблук, в другому — 22,5 кг, у третьому — 21 кг.

Відповідь. 10,5 кг, 22,5 кг, 21 кг.

Розв'язування задач на рух за допомогою складання лінійних рівнянь з однією змінною

Розв'язуючи задачі на рух, бажано запам'ятати, що при рівномірному русі пройдена тілом відстань (s) дорівнює добутку швидкості (v) на час (t), тобто $s = vt$. де відстань s вимірюється в км, м, см, ...; час t вимірюється в год, хв, с,

...; швидкість v - в $\frac{\text{км}}{\text{год}}, \frac{\text{м}}{\text{хв}}, \frac{\text{см}}{\text{с}}; \dots$

При цьому всі значення величин слід виражати у відповідних одиницях вимірювання. Наприклад, якщо час дано у хвилини, а відстань у метрах, то швидкість слід виражати в метрах за хвилину. Із цієї формули можна виразити швидкість (v) і час (t): $v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$.

У задачах на рух треба дотримуватися таких умовностей (припущень):

а) повороти виконуються миттєво, швидкість при цьому змінюється або змінюється миттєво;

б) швидкість течії в будь-якому місці річки однакова;

в) якщо тіло рухається за наявності течії, то швидкість його руху за течією (проти течії) дорівнює сумі (різниці) власної швидкості та швидкості течії.

Приклад 1.

Задача 1. Катер пройшов відстань між пристанями за течією річки за 4 год, а проти течії — за 6 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії 1,5 км/год.

Зразок запису

Нехай власна швидкість катера x км/год. Коли катер рухався за течією річки, то його швидкість була $(x+1,5)$ км/год і за 4 год він пройшов шлях $4(x+1,5)$ км. Якщо ж катер рухався проти течії річки, то тоді його швидкість була $(x-1,5)$ км/год, і за 6 год він проплив $6(x-1,5)$ км. За умовою задачі катер пройшов за течією і проти течії однаковий шлях, тому $4(x+1,5)=6(x-1,5)$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$4(x+1,5) = 6(x-1,5),$$

$$4x + 6 = 6x - 9,$$

$$4x - 6x = -9 - 6,$$

$$-2x = -15,$$

$$x = 7,5.$$

Отже, власна швидкість катера 7,5 км/год.

Відповідь. 7,5 км/год.

Задача 2. Бомбардувальник за 4 год пролетів таку відстань, як винищувач за 3 год. Знайдіть швидкість винищувача, якщо відомо, що швидкість бомбардувальника на 400 км/год менша, ніж швидкість винищувача.

Нехай швидкість винищувача x км/год, а швидкість бомбардувальника $(x-400)$ км/год. За 4 год бомбардувальник пролетів $4(x-400)$ км, а винищувач за 3 год — $3x$ км. Складаємо рівняння:

$$4(x-400) = 3x;$$

$$4x - 1600 = 3x;$$

$$4x - 3x = 1600;$$

$$x = 1600.$$

Отже, швидкість винищувача 1600 км.

Відповідь. 1600 км/год.

Задачі на перекладання (переливання)

Задача 1.

1. Розв'язуючи задачу, заповніть пропуски.

На першій ділянці було в три рази більше саджанців малини, ніж на другій. Після того як з першої ділянки вивезли 20 саджанців, а на другій посадили ще 10, то на обох ділянках саджанців стало порівну. Скільки всього саджанців малини було на двох ділянках спочатку?

Розв'язання:

Ділянка	Кількість саджанців	
	Було	Стало
Перша	\square	$\square - 20$
Друга	x	$x \square 10$

Рівняння:

$$\square - 20 = x \square 0.$$

$$\square x - x = \square + 10,$$

$$\square x = \square,$$

$$x = \square.$$

$$\text{Тоді } 3x + x = 4x = 4 \cdot \square = \square.$$

Отже, на обох ділянках було \square саджанців малини.

Відповідь. \square саджанців.

Задача 2.

Бригада повинна виконати завдання з виготовлення деталей за 5 днів, а виконала роботу за 4 дні, бо виготовляла щодня на 12 деталей більше. Скільки деталей виготовила бригада?

Розв'язання:

Бригада	Кількість деталей, виготовлених щодня	Кількість днів	Усього деталей
Повинна виконати	x	5	$5x$
Виконала	$x + 12$	4	$4(x + 12)$

$$\text{Маємо рівняння: } 5x = 4(x + 12).$$

$$\text{Звідси } 5x = 4x + 48,$$

$$x = 48,$$

$$\text{тоді } x + 12 = 48 + 12 = 60.$$

Отже, бригада виготовила $4(x + 12) = 4 \cdot 60 = 240$ деталей.

Відповідь. 240 деталей.

Розв'язування задач геометричного змісту та задач на пропорційний поділ.

Задача 1. Периметр прямокутника 800 м. Одна зі сторін у 7 разів довша, ніж друга. Знайдіть сторони і площу даного прямокутника.

Задача 2. Одна сторона трикутника у 2 рази довша, ніж друга, і на 5 см коротша, ніж третя. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 35 см.

Задача 3. Довжини сторін двох квадратів пропорційні числам 12 і 19, а різниця їх периметрів становить 56 см. Знайдіть площу меншого квадрата.

Задача 4. Кількість однокімнатних, двокімнатних і трикімнатних квартир у будинку пропорційна числам 3; 8; 5. Скільки квартир кожного типу в будинку, якщо в ньому трикімнатних квартир на 24 менше, ніж двокімнатних?