Лекція 2.

Лінійні рівняння з однією змінною. Розв’язування лінійних рівнянь з однією змінною. Розв’язування рівнянь, що зводяться до лінійних.

Розв’язування багатьох практичних задач зводиться до розв’язування рівнянь, які можна перетворити на рівняння виду $ax + b$, де a і b - задані числа, x – змінна (невідоме).

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — дані числа, x — змінна, називається лінійним рівнянням.

Наприклад, рівняння $3x = 7$, $2x=-5$, $\frac{1}{3}x = -2$, $0x = 3$ є лінійними. Число a називають коефіцієнтом при змінній x, а число b вільним числом. Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax=b$ називається рівнянням першого степеня з однією змінною. Його корінь $x = \frac{b}{a}$. Лінійне рівняння може мати один корінь, безліч коренів або взагалі не мати коренів.

Наприклад, рівняння $0x = 7$ не має коренів, рівняння $0x=0$ має безліч коренів, рівняння $5x=0$ має один корінь.

Щоб розв'язати рівняння, спочатку зводять його до лінійного. Для цього існує такий алгоритм дій:

1. Позбутися знаменників.
2. Розкрити дужки.
3. Перенести члени зі змінними в ліву частину рівняння, а інші — у праву.
4. Звести подібні доданки

Цей алгоритм, як ви вже помітили, базується на застосуванні основних властивостей рівнянь. Тому в результаті проведених перетворень дістаємо рівняння, рівносильне даному — його корені є коренями вихідного рівняння.

Розглянемо приклад.

Розв'яжіть рівняння $7(0,3x-2)-9(0,9x-i) = 2x-1$.

Розкриємо дужки в лівій частині рівняння і зведемо подібні доданки:

$2,1x – 14 - 8,1x + 9 = 2x-1,$

$-6x - 5=2x – 1.$

Перенесемо члени зі змінними в ліву частину рівняння, а числа — у праву, змінивши їх знаки на протилежні, знову зведемо подібні доданки:

$-6x - 2x= -1+5,$

$-8x = 4.$

Дістали лінійне рівняння, корінь якого $x= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

Розв'язування рівнянь, що зводяться до лінійних

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{x+5}{8} - \frac{1-x}{2}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 24 (24 - найменший спільний знаменник дробів, що входять до рівняння).

$8(2x-1) = 3(x+5)-12(1-x).$

Розкриємо дужки:

16x-8 = 3x+15-12 +12x.

Перенесемо невідомі доданки в ліву частину рівняння, відомі — у праву, змінивши їх знак на протилежний:

16x-3x-12x=15-12 +8.

Виконаємо зведення подібних доданків:

x=11

Відповідь. *11*.

Розв'язування рівнянь, ліва частина яких містить добуток лінійних множників, а права частина дорівнює нулю.

Якщо добуток кількох чисел дорівнює нулю, то можна зробити висновок: хоча б один із множників дорівнює нулю.

Цей факт можна використати і при розв'язуванні рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння (2x – 6)(x + 2) = 0.

Ліва частина рівняння — добуток невідомих множників 2x-6 і x + 2, а права частина — нуль. Щоб розв'язати це рівняння, досить прирівняти до нуля множники 2x – 6 і x + 2 та розв'язати здобуті рівняння. Отже,

2x - 6 = 0 (1)

або

x + 2 = 0. (2)

З рівняння (1) дістанемо

2x - 6 = 0,

2x = 6,

x = 6:2,

x = 3.

Корінь рівняння (2) дорівнює -2.

Зразок запису

Розв'язання:

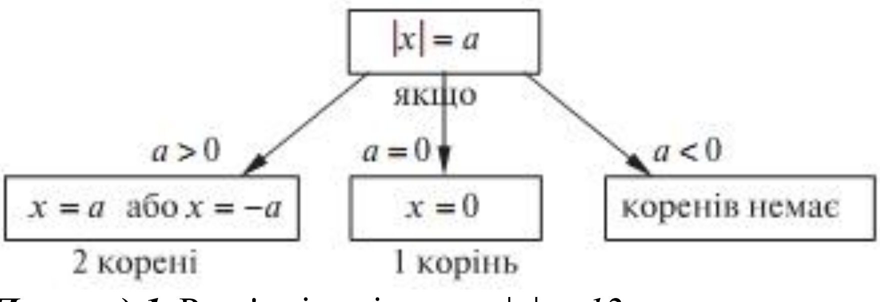
(2x-6)(x + 2) = 0, якщо 2x-6 = 0,або x + 2 = 0.

1) 2x-6 = 0, 2x = 6, x = 6:2, *x = 3.*

2) x + 2 = 0, x = -2.

Відповідь. 3; -2.

Розв'язування рівнянь, які містять змінну (невідоме) під знаком модуля.



Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $|x| = 12$.

Розв'язання

I спосіб

Якщо x — додатне число, то за означенням модуля $| x | = x$ маємо: $x = 12$.

Якщо x — від'ємне число, то за означенням модуля $| x | = - x$ маємо: $-x = 12$, звідси $x = - 12$.

Відповідь. *12 і -12.*

ІІ спосіб

Ця рівність геометрично означає, що відстань від точки x до початку координат дорівнює 12, тобто $x = 12$ або *-12* (рис. 2).

Відповідь. *12 і -12.*

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $|2x+3|=1$.

Розв'язання:

І спосіб

Якщо 2x + 3 – від'ємне число, то за означенням модуля -(2x + 3) = 1, тоді 2x + 3 = -1, 2x = -3 - 1, 2x = - 4, x = -2.

Якщо 2x + 3 — додатне число, то за означенням модуля $2x$ +3 = 1, тоді 2x = -3 + 1, 2x = -2, x = -1.

Відповідь. -1,-2.

ІІ спосіб

Рівність $|2x+3|=1$ геометрично означає, що відстань від точки 2x+3 до початку координат дорівнює 1 (рис. 3), тобто:

1) 2x + 3 = 1, 2x = -3 + 1, 2x = -2, x = -1;
2) 2x + 3 = -1, 2x = -3 - 1, 2x = -4, x = -2.

Рис. 3

Відповідь. -1, -2.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $2(|x|-3)-4(2|x|+9)=-48$.

1) Оскільки рівняння містить змінну під знаком модуля, його треба звести до вигляду $|x|=a$.

2) Щоб виконати п. 1) необхідно здійснити рівносильні перетворення відносно $|x|$.

Тільки тоді можна зробити відповідні записи:

$2\ \ |x|-3\ \ -4\ \ 2|x|+9\ \ =-48$;

$2|x|-6-8|x|-36=-48$;

$-6|x|-42=-48$;

$-6|x|=-6$;

$|x|=1$;

$x=1$ або $x=-1$.

Відповідь. 1; –1.

Висновки. Розібравши приклади ми впевнилися в тому, що деякі рівняння з модулем, так само як і деякі рівняння з дробами (не всі!!!), шляхом виконання рівносильних перетворень та використання властивостей чисел можуть бути зведені до лінійних рівнянь з однією змінною.

Розв’язування рівнянь з параметрами.

У рівнянні крім невідомого, яке потрібно знайти, можуть бути введенні й інші букви, наприклад, ax = 3 – a, (n+2)x = 2 + (n+2).

Розглянемо рівняння ax = 3 – a, яке залежно від значення змінної a матиме вигляд:

$2x=3-2$, якщо $a=2$;

$0x = 3-0$, якщо $a = 0$;

$3x = 3-3$, якщо $a = 3$ і т.д.

Змінну, яку потрібно знайти, будемо називати невідомою, іншу змінну назвемо параметром.

Розв’язати рівняння з параметром означає, що для кожного значення параметра треба встановити, чи має рівняння розв’язки, що, як правило, залежить від параметра.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння $x + 5 = a + 6$ відносно x.

Розв’язання:

Перетворивши рівняння, дістанемо:

$x = a + 1$.

Рівняння має єдиний розв’язок незалежно від значення параметра.

Отже, $x = a + 1$.

Відповідь. $a + 1$.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння $(a - 1)x = 3$ відносно x.

Розв’язання:

Якщо $a - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{3}{a-1}$.

Якщо $a - 1 = 0$, тобто $a = 1$, то рівняння набуває вигляд 0x = 3 і не має коренів.

Відповідь. При $a \neq 1$ дане рівняння має єдиний корінь $x = \frac{3}{a-1}$, а при $a = 1$ – коренів не має.